Exercícios de Análise Real (Cap.1,2,3.)
Unioeste –Matemática - 2020

Pedro Pablo Durand Lazo

19 de janeiro de 2021

Sumário

1 Números Reais

A) Demonstrar:

1. $b + a = c + a \Rightarrow b = c$
2. $a + a = a \Rightarrow a = 0$
3. O oposto de um número é único.
4. O oposto de $a - b$ é $b - a$
5. A identidade aditiva (zero) é única.
6. $\forall x \in \mathbb{R}: \quad -(-x) = x$
7. O oposto de zero é o próprio zero
8. $ba = ca$ e $a \neq 0 \Rightarrow b = c$
9. O inverso de um número é único
10. A identidade multiplicativa é única
11. $1^{-1} = 1.$
12. $(b - c) + (c - a) = b - a$
13. $-(a + b) = -a - b.$
14. $(c + a) - (c + b) = a - b$
15. $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x0 = 0$
16. Zero não tem inverso.
17. $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \neq 0$
18. $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$
19. $a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$
20. $\dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$
21. $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = a^{-1}$
22. $a \neq 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ $\left(ou \quad \dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} \right)$
23. $b \neq 0$ e $d \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{ad}{bd}$
24. $1^{-1} = 1$
25. $b \neq 0$ e $d \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac + bc}{bd}$
26. $(-1)(-1) = 1$
27. $(-1)a = -a$
28. $(-a)(-b) = ab$
29. $(-a)b = -(ab)$
30. $a(-b) = -(ab)$
31. $\dfrac{-a}{b} = -\left(\dfrac{a}{b}\right), \quad b \neq 0$
32. $\dfrac{a}{-b} = -\left(\dfrac{a}{b}\right), \quad b \neq 0$
33. $a(b - c) = ab - ac$
34. A equação ax+b=0, $a \neq 0$, tem solução única $x = -\left(\dfrac{b}{a}\right)$

B) Demonstrar:

(a) $a > 0 \Leftrightarrow a$ é positivo

(b) Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

(c) Para todo a e b em $\mathbb{R}$ uma e só uma das afirmações:
$a < b, \quad a = b, \quad b < a$ é verdadeira

(d) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

(e) $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

(f) O produto de dois números negativos é positivo.

(g) O produto de um positivo por um negativo é negativo.

(h) $a^2 > 0$ para todo $a \neq 0$

(i) A equação $x^2 - 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$.

(j) $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

(k) Se aé positivo, a^{-1} é positivo.

(l) Se a é negativo,a^{-1} é negativo.

(m) Se $0 < a < b$ então, $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

(n) Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$ e $a - d > b - c$.

(o) Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$.

(p) Se $a > 0$ e $b > 0$, então $ac > bd$ e $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

(q) Não existe o maior número real.

C) Demonstrar:

(a) Para $x, y \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$, tem-se;

(i) $|x| = max(x, -x)$ $\quad (ii)$ $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ $\quad (iii)$ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iv) $|xy| = |x| \cdot |y|$ $\quad (v)$ $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ $\quad (vi)$ $|x| < \beta \Leftrightarrow -\beta < x < \beta$

(vii) $|x| \leqslant \beta \Leftrightarrow -\beta \leqslant x \leqslant \beta$ $\quad (viii)$ $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$

(b) $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

(c) O Teorema de Encaixe de Intervalos.

D) Achar os valores de x que satisfazem:

(a) $|x + 4| < 2$ $\quad (b)$ $|3x - 24| < 7$ $\quad (c)$ $|3x - 24| < 7$

(d) $|3x - 24| > 5$ $\quad (e)$ $|4 - 5x| \leqslant 6$ $\quad (f)$ $|x + 1| \leqslant |x|$

(g) $|4x - 2| \geq 4$

E) Demonstrar:

(a) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, onde $y \neq 0$. $\quad (b)$ $|x| = |-x|$. $\quad (c)$ $|x - y| = |y - x|$.

(d) $|x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|$. $\quad (e)$ $|x - y| \leqslant |x| + |y|$. $\quad (f)$ $|x| - |y| \leqslant |x - y|$.

(g) $x = x^+ - x^-$. $\quad (j)$ $|x| = x^+ + x^-$.

F) Encontre o supremo e o ínfimo de cada S. Indique se eles estão em S.

(a) $S = \{x \mid -(1/n) + [1 + (-1)^n]n^2, \ n \geqslant 1\}$

(b) $S = \{x \mid x^2 < 9\}$

(c) $S = \{x \mid x^2 \leqslant 7\}$

(d) $S = \{x \mid |2x+1| < 5\}$

(e) $S = \{x \mid (x^2+1)^{-1} > \frac{1}{2}\}$

(f) $S = \{x \mid x \text{ racional e } x^2 \leqslant 7\}$

G) Sejam S e T conjuntos não vazios de números reais. Definimos $S + T = \{s + t \mid s \in S \text{ e } t \in T\}$. Mostrar que

(a) $\sup(S+T) = \sup S + \sup T$, se S e T são limitados superiormente.

(b) $\inf(S+T) = \inf S + \inf T$, se S e T são limitados inferiormente

H) A Propriedade Arquimediana A propriedade dos números reais descrita no próximo teorema é chamada de propriedade arquimediana. Intuitivamente, ele afirma que é possível exceder qualquer número positivo, não importa o quão grande, adicionando um número positivo arbitrário, não importa o quão pequeno, a si mesmo muitas vezes.

Teorema (A propriedade arquimediana) Se a e b são positivos; então $an > b$, para algum inteiro n:

2 Funções

1. Se X, X_1, X_2 são subconjuntos de A e $a \in A$, então:

   (a) $f(\{a\}) = \{f(a)\}$ $\quad(b)$ $f(X) = \emptyset \Leftrightarrow X = \emptyset$

   (c) $X_1 \subset X_2 \Rightarrow f(X_1) \subset f(X_2)$ $\quad(d)$ $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

   (e) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$

2. Se Y, Y_1, Y_2 são subconjuntos de B, então:

   (a) $f^{-1}(B) = A$

   (b) $Y = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(Y) = \emptyset$

   (c) $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$

   (d) $f^{-1}(X_1 \cup X_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f(^{-1}Y_2)$

   (e) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

3. Se $X \subset A$ e $Y \subset B$, então:

   (a) $X \subset f^{-1}(f(X))$ $\quad(b)$ $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$

4. Se Y, Y_1, Y_2 são subconjuntos de B, então:

   (a) $f^{-1}(B) = A$

   (b) $Y = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(Y) = \emptyset$

   (c) $Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$

   (d) $f^{-1}(X_1 \cup X_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f(^{-1}Y_2)$

   (e) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

5. Se $X \subset A$ e $Y \subset B$, então:

   (a) $X \subset f^{-1}(f(X))$ $\quad(b)$ $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$

6. Sejam $f : A \mapsto B$, $\{A_\alpha : \alpha \in L\}$ uma familia de partes de A e $\{B_\alpha : \alpha \in L\}$ uma familia de partes de B. Então

   (a) $A_\alpha \subset A_\beta \Rightarrow f(A_\alpha) \subset f(A_\beta)$ $\quad(b)$ $B_\alpha \subset B_\beta \Rightarrow f^{-1}(B_\alpha) \subset f^{-1}(B_\beta)$

   (c) $f\left(\bigcup_{\alpha\in L} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in L} f(A_\alpha)$ $\quad(d)$ $f\left(\bigcap_{\alpha\in L} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in L} f(A_\alpha)$

   (e) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in L} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in L} f^{-1}(B_\alpha)$ $\quad(f)$ $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in L} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in L} f^{-1}(B_\alpha)$

   (g) $A_\alpha \subset f^{-1}(f(A_\alpha))$ $\quad(h)$ $f(f^{-1}(B_\alpha)) \subset B_\alpha$

7. Seja $f : A \mapsto B$. Então

   (a) f é injetora se, e somente se, $(\forall x \in A) : f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.

   (b) f é sobrejetora se, e somente se, $(\forall y \in B) : f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

   (c) A relação f^{-1} de B em A é função de B em A se, e somente se, f é uma bijeção.

   (d) A inversa f^{-1} de uma bijeção f é uma bijeção.

8. Seja f uma bijeção de A em B e f^{-1} a bijeção recíproca de f, então

$$f^{-1} \circ f = id_A \qquad f \circ f^{-1} = id_B$$

   onde, para um conjunto X, id_X é a função: $X \mapsto X; x \mapsto x$.

9. Sejam os conjuntos A, B, C, D e f, g, h as funções:

$$A \overset{f}{\mapsto} B \overset{g}{\mapsto} C \overset{h}{\mapsto} D$$

   então

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

10. Se f e g são sobrejeções (resp. injeções), $g \circ f$ é sobrejetora (resp. injetora).

11. Se f e g são bijeções, $g \circ f$ é bijetora e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

12. $g \circ f$ injetora $\Rightarrow f$ injetora

13. $g \circ f$ sobrejetora $\Rightarrow g$ sobrejetora

14. Seja f uma função de A em B.

    (a) $(\forall X \in 2^A) : f^{-1}(f(X)) = X \Leftrightarrow f$ é injetora

    (b) $(\forall Y \in 2^B) : f(f^{-1}(Y)) = Y \Leftrightarrow f$ é sobrejetora

15. Seja f uma função de A em B.
    Para todo $X_1, X_2 \in 2^A : f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2) \Leftrightarrow f$ é injetora

16. Sejam f, g, h funções de A em A.

    (a) $[f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h] \Leftrightarrow f$ é injetora

    (b) $[g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h] \Leftrightarrow f$ é sobrejetora

17. Para cada função elementar fundamental f, determinar seu domínio A e sua imagem $f(A)$

18. Para a função definida por $f(x) = 3x^2 - x + 6$. Achar $f(1)$ e $f(6)$

19. Para a função definida por $f(x) = x^3 + 1$. Achar $f(1)$, $f(a+1)$ e $f(\alpha^2)$

20. Para a função definida por $\psi(x) = \dfrac{x^2+1}{3x-1}$, achar $\psi(\frac{1}{x})$ e $\frac{1}{\psi(x)}$.

21. $f(\theta) = \tan\theta$. Verificar a igualdade $f(2\theta) = \frac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$.

22. $\varphi(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$. Verificar a igualdade $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

23. $F(x) = \log x \quad f(x) = x^3$. Escrever: $f(F(x))$ e $f(F(x))$.

24. Determinar o domínio das funções definidas por:

    $(a)\quad y = 1 + x^2$ $\quad(b)\quad y = \sqrt{1-x^2}$ $\quad(c)\quad y = \frac{1}{1-x^2}$
    $(d)\quad y = \sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$ $\quad(e)\quad y = \frac{a+x}{a-x}$ $\quad(f)\quad y = \arcsin^2 x$

25. Esboçar o gráfico das funções definidas por:

    $(a)\quad y = 1 + x^2$ $\quad(b)\quad y = (1+x)^2$ $\quad(c)\quad y = -1 + x^2$
    $(d)\quad y = (1-x)^2$ $\quad(e)\quad y = -1 + (1+x)^2$ $\quad(f)\quad y = 2x^2$
    $(g)\quad y = \frac{1}{2}x^2$ $\quad(h)\quad y = (2x)^2$ $\quad(i)\quad y = -(1+x)^2$
    $(j)\quad y = \frac{1}{2}(1+x)^2$

26. Esboçar o gráfico das funções definidas por:

    $(a)\quad y = \pi + \mathrm{sen}x$ $\quad(b)\quad y = \mathrm{sen}(\pi + x)$ $\quad(c)\quad y = \mathrm{sen}(2x)$
    2. $(d)\quad y = 2\mathrm{sen}x$ $\quad(e)\quad y = 1 + 2\mathrm{sen}(\frac{1}{2}x)$

27. Esboçar o gráfico das funções definidas por:

    $(a)\quad y = 2^x$ $\quad(b)\quad y = (\frac{1}{2})^x$ $\quad(c)\quad y = 1 + 2^x$
    $(d)\quad y = 1 - 2^x$ $\quad(e)\quad y = 2^{1+x}$ $\quad(f)\quad y = 2^{-x}$
    $(g)\quad y = -2^{-x}$ $\quad(h)\quad y = (\frac{1}{2})^{-x}$

28. Esboçar o gráfico das funções definidas por:

    (a) $y = \begin{cases} 1+x & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-2x & \text{se } \ 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

    (b) $y = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ -x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$

29. Se f é limitada superiormente, $-f$ é limitada inferiormente e

$$\inf_{x\in X}(-f(x)) = -\sup_{x\in X} f(x)$$

30. Seja $f : f : X_1 \times X_2 \mapsto \mathbb{R}$. Se f é limitada superiormente,

$$\sup_{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2} f(x_1,x_2) = \sup_{x_1\in X_1}\left(\sup_{x_2\in X_2} f(x)\right)$$

31. Sejam $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$ tais que $f \leqslant g$. Então se g é limitada superiomente, f é limitada superiormente e

$$\sup_{x\in X} f(x) \leqslant \sup_{x\in X} g(x)$$

32. Sejam as funções $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$ ambas limitadas superiormente. Então, $f + g$ é limitada superiormente e

$$\sup_{x\in X} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x)$$

Se, além disto, g é limitada inferiormente, tem-se

$$\sup_{x\in X} f(x) + \{inf_{x\in X} g(x) \leqslant \sup_{x\in X} (f(x) + g(x))$$

3 Cardinalidade

1. O conjunto $\mathbb{N}$ está munido de dois operações, Adição e Multiplicação, definidas por:
Adição: $m+1=s(m), \quad m+s(n)=s(m+n)$,
Multiplicação: $m1=m, \quad m(n+1)=mn+m$.
Provar por indução:

   (a) Associatividade: $(m+n)+p=m+(n+p)$, $(mn)p=m(np)$,

   (b) Comutatividade: $m+n=n+m, \quad mn=nm$.

   (c) Distributividade: $m(n+p)=mn+mp$.

   (d) Lei do corte: $m+n=m+p \Rightarrow n=p$, $mn=mp \Rightarrow n=p$.

2. Sejam E, F conjuntos finitos de cardinais iguais e $f: E \mapsto F$.
fé injetiva $\Leftrightarrow$ fé sobejetiva $\Leftrightarrow$ fé bijetiva .

3. Todo subconjunto F de um conjunto finito E é finito e $card(F) \leqslant card(E)$ e $card(F)=card(E) \Leftrightarrow F=E$.

4. Toda parte P de $\mathbb{N}$ é finita se, e somente se, é limitada superiormente. Neste caso, existe uma bijeção estritamente crescente de $I_{card(P)}$ em P.

5. Sejam M e N conjunto finitos não vazios. Denotemos:
$\mathcal{F}(M,N)=N^M$ o conjunto das funções de M em N,
$\mathcal{I}(M,N)=\{f \in N^M : f \text{ é injetora}\}$ o conjunto das funções injetoras de M em N.
$\mathcal{B}(M,N)=\{f \in N^M : f \text{ é bijetora}\}$ o conjunto das funções bijetoras de M em N.
$\mathcal{P}_m(N)=\{M \subset N : card(M)=m\}$.
Pondo $card(M)=m$ e $card(N)=n$, provar que:

   (a) $card(\mathcal{F}(M,N))=m^n$.

   (b) $card(\mathcal{I}(M,N))=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

   (c) $card(\mathcal{B}(M,N))=n!$

   (d) $card(\mathcal{P}_m(N))=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1}{m!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

6. Se E é infinito, existe uma função $f:\mathbb{N} \mapsto E$ injetora.

7. Um conjunto E é infinito se, e somente se, E é equipotente com alguma de suas partes próprias.

8. Todo subconjunto de um conjunto enumerável é no máximo enumerável.

9. Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.